

2. APPUNTI SUI FASCI DI CIRCONFERENZE (raccolti dal prof. G. Traversi)

La circonferenza è la curva di 2° grado che viene individuata univocamente da tre punti non allineati e possiede la seguente proprietà: tutti i suoi punti hanno la stessa distanza da uno stesso punto, definito centro.

L'equazione canonica della circonferenza è espressa nella forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbf{R}$, la cui rappresentazione sul piano cartesiano è possibile solo se $r > 0$, cioè se $a^2 + b^2 - 4c \geq 0$; in realtà per $r = 0$ la figura degenera in un punto, che è il centro della circonferenza.

Se i punti sono allineati, geometricamente si può costruire solo una retta, o ...al limite una "circonferenza di raggio infinito con centro all'infinito" nell'ambito di un piano proiettivo.

Un fascio di circonferenze è costituito da una famiglia di infinite circonferenze che hanno a due a due in comune un dato asse radicale oppure hanno tutte lo stesso centro, ma raggi diversi.

Importante: nei fasci il punto base è un punto comune a tutte le circonferenze della famiglia. Le modalità grafiche che si possono presentare per un fascio di circonferenze sono le seguenti:

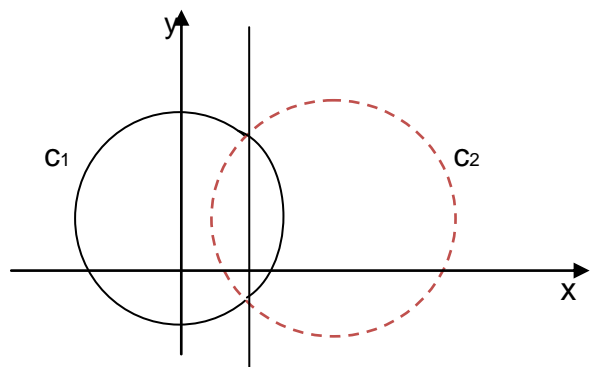
- possedere due punti base distinti, intersezione reale di una qualunque coppia di circonferenze, allora il fascio viene definito iperbolico (Fig.1);
- possedere due punti base coincidenti, caso di coppia di circonferenze tangenti in un punto, allora il fascio è detto parabolico (Fig.2);
- non possedere alcun punto base, nessuna intersezione tra le circonferenze del fascio, in tale situazione il fascio risulta ellittico (Fig.3).

Osservazione importante: In un fascio di circonferenze non concentriche l'asse radicale, che esiste anche quando il fascio è ellittico, risulta sempre perpendicolare alla retta cui appartengono tutti i centri delle circonferenze del fascio (chiamata retta dei centri o asse centrale). L'equazione dell'asse radicale si ottiene dalla sottrazione membro a membro delle due equazioni delle generatrici. In generale l'equazione del fascio di due circonferenze non concentriche si costruisce scegliendo due equazioni canoniche (dette generatrici del fascio) in una combinazione lineare con due parametri h e m ; in simboli:

$$h \cdot c_1 + m \cdot c_2 = 0, \text{ cioè } h(x^2 + y^2 + ax + by + c) + m(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0, \text{ con } h, m \in \mathbf{R} \quad (1)$$

Ogni circonferenza del fascio è univocamente determinata dalla coppia di parametri reali (h, m) ; in particolare per $h = 0$ si ottiene c_2 e per $m = 0$ si ricava c_1 ; inoltre se ad uno dei parametri viene imposta la condizione di non annullarsi, ad esempio $h \neq 0$, allora ponendo $k = m/h$ la (1) diventa

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0, \text{ con } k \in \mathbf{R}. \quad (2)$$



In questo caso k (parametro essenziale) non rappresenta tutte le circonferenze perché manca quella relativa a $h = 0$.

Non è invece possibile annullare entrambi i parametri perché in questo caso l'equazione si trasformerebbe nell'identità $0 = 0$.

Fig.1 (fascio iperbolico)

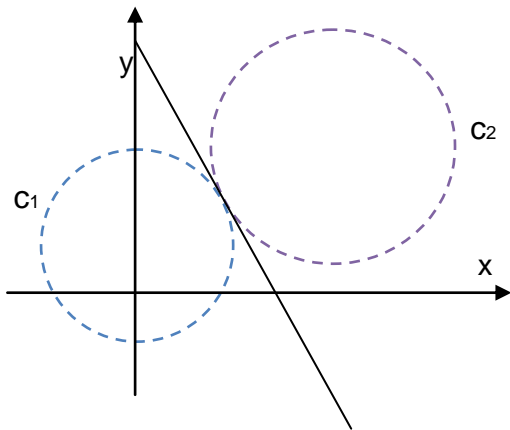


Fig.2 (fascio parabolico)

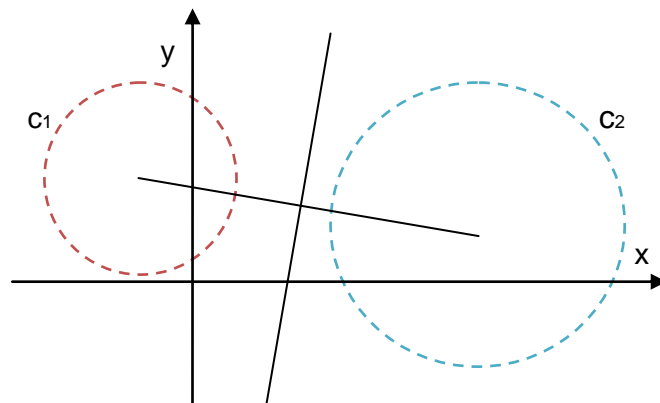
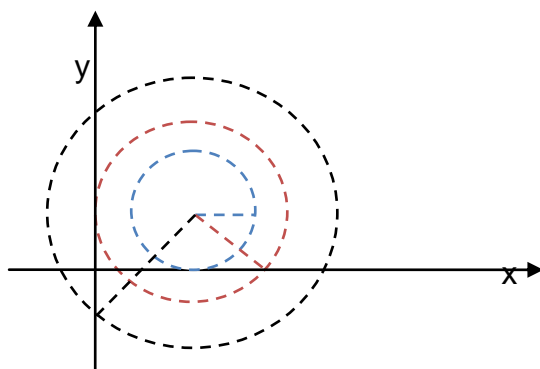


Fig.3 (fascio ellittico)

L'equazione del fascio di due circonferenze di centro $C(\alpha, \beta)$ e raggio \sqrt{k} si costruisce come distanza tra C e un punto $P(x; y)$ variabile su una circonferenza; in simboli $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = k$, con $k > 0$ (3)



Conoscendo i valori di α e β l'equazione (3) dipende solo dal parametro essenziale k , che rappresenta il quadrato del raggio di tutte le circonferenze del fascio, e assume la forma seguente:

$$x^2 + y^2 + ax + by + k = 0 \quad (3)$$

2.1 Riduzione dell'equazione e casi particolari

Siccome i coefficienti quadratici della circonferenza valgono 1, è possibile ridurre l'equazione del fascio a una combinazione lineare tra le equazioni di una circonferenza e di una retta (in realtà si tratta di una **circonferenza degenere**):

$$h \cdot c_1 + m \cdot r = 0, \text{ cioè } h(x^2 + y^2 + ax + by + c) + m(a'x + b'y + c') = 0, \text{ con } h, m \in \mathbf{R} \quad (4)$$

Questa riduzione è sempre possibile se non vale la relazione $a:a' = b:b'$; in quest'ultimo caso il fascio è composto di circonferenze concentriche e può essere riscritto come dipendente da un unico parametro, espresso nell'equazione (3). Inoltre la riduzione non è possibile anche nel caso in cui $h = 0$ (o nel caso (2) equivalentemente $k = -1$); in questo caso il fascio originario degenera in un retta.

2.2 Asse radicale e punti di intersezione

Riassumendo quanto illustrato finora, nel caso di fascio di circonferenze non concentriche, i centri di tutte le circonferenze del fascio giacciono sulla medesima retta chiamata "asse centrale", mentre la retta

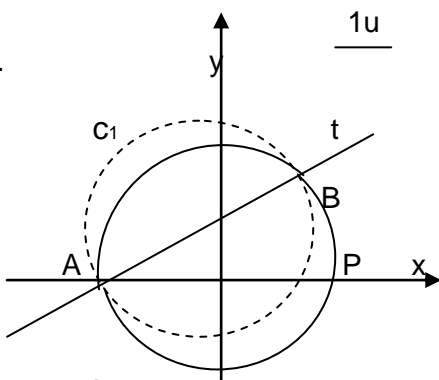
passante per il punto di tangenza comune o per i punti di intersezione delle due generatrici è detta "asse radicale".

Esprimendo invece il fascio come combinazione lineare di una retta e una circonferenza, la retta base risulta essere l'asse radicale del fascio, mentre l'asse centrale è la retta perpendicolare alla retta base e passante per il centro della circonferenza base.

Le due circonferenze generatrici (o la circonferenza e la retta) possono trovarsi in diverse posizioni reciproche, determinando diverse proprietà del fascio:

- le due circonferenze si intersecano in due punti: tutte le circonferenze del fascio passano per i punti di intersezione;
- le due circonferenze sono tangenti: tutte le circonferenze del fascio passano per il punto di tangenza;
- le due circonferenze non si intersecano: non ci sono punti comuni a tutto il fascio.

ESEMPIO 2.1. Scrivere l'equazione del fascio di circonferenze passanti per i punti A(-2;0) e B(1;2); successivamente determinare l'equazione della circonferenza che passa anche per P(2;0)



Si possono scegliere come generatrici del fascio la circonferenza c_1 di diametro AB e l'asse radicale AB;

infatti $\overline{AB} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13}$, $r = \sqrt{13}/2$ e $C(-1/2;1)$

per cui l'equazione di c_1 è $(x + 1/2)^2 + (y - 1)^2 = 13/4$ e

quella di t risulta $(x+2)/3 = (y-0)/2$, cioè $2x - 3y + 4 = 0$;

per cui l'equazione del fascio risulta

$$x^2 + y^2 + x - 2y - 2 + k(2x - 3y + 4) = 0.$$

Per determinare poi l'equazione della circonferenza che passa per P, basta sostituire le coordinate di P all'equazione del fascio in modo da ottenere il valore del parametro k; infatti,

$2^2 + 0^2 + 2 - 2 \cdot 0 - 2 + k(2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 4) = 0$; $4 + 8k = 0$, da cui $k = -1/2$; sostituendo infine k nell'equazione del fascio si ha:

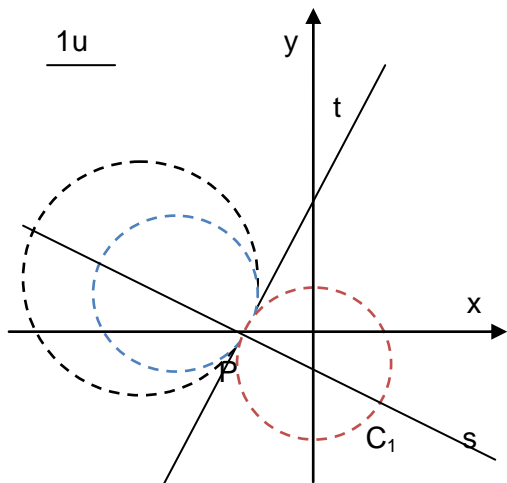
$$x^2 + y^2 + x - 2y - 2 - 1/2(2x - 3y + 4) = 0; \quad x^2 + y^2 + x - 2y - 2 - x + 3/2y - 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1/2y - 4 = 0.$$

ESEMPIO 2.2 Scrivere l'equazione del fascio f di circonferenze tangenti nel punto P di ascissa -1 alla retta t di equazione $2x - y + 2 = 0$; determinare poi la circonferenza di f avente il centro sull'asse y.

Essendo P il punto di tangenza della retta t, sicuramente appartiene a t e a tutte le circonferenze del fascio, per cui è facile determinare l'ordinata di P mediante sostituzione dell'ascissa nell'equazione di t: $y_P = 2(-1) + 2 = 0$. Quindi P ha coordinate (-1; 0); inoltre essendo t tangente a tutte le circonferenze del fascio, risulta essere asse radicale, che di fatto individua una generatrice del fascio; è possibile determinare poi l'altra generatrice con la costruzione della circonferenza c_P di centro P e raggio nullo, che ha equazione: $(x + 1)^2 + (y - 0)^2 = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$

Allora l'equazione del fascio risulta $c_P + k \cdot t = 0$, $f: x^2 + y^2 + 2x + 1 + k(2x - y + 2) = 0$.



Per determinare il centro della circonferenza sull'asse y, basta utilizzare la proprietà dei punti di tangenza, in cui il raggio è perpendicolare alla tangente. Quindi dall'equazione di t si ricava il coefficiente angolare $m = 2$, che viene usato per determinare il coefficiente angolare della retta s passante per P; in simboli: $m' = -1/m = -1/2$; $y - 0 = -1/2(x + 1)$, da cui $s: x + 2y + 1 = 0$ (retta contenente centro e raggio di C_1). Intersecando s con l'asse y si ottiene il centro di coordinate

$(0; -1/2)$. A questo punto considerato il fascio f come equazione standard di infinite circonferenze $x^2 + y^2 + 2x(k + 1) - ky + 2k + 1 = 0$, si individua il centro $(-k - 1; +k/2)$. Identificando le coordinate trovate con i valori parametrici del fascio si ottiene il valore unico di $k = -1$;

infatti $-k - 1 = 0$ e $k/2 = -1/2$; da cui $k = -1$. Sostituendo k nel fascio f, si ottiene l'equazione della circonferenza con centro sull'asse y: $x^2 + y^2 + 2x(-1 + 1) + (-1)(-y) + 2(-1) + 1 = 0$; cioè $x^2 + y^2 + y - 1 = 0$.

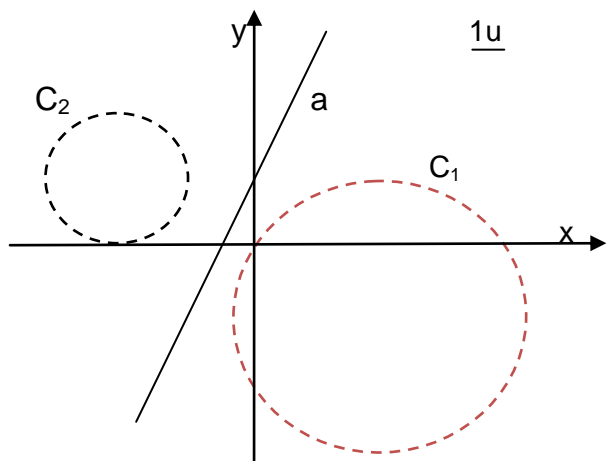
ESEMPIO 2.3. Determinare le intersezioni tra le due circonferenze di equazione:

$C_1: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ e $C_2: x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$, nonché l'equazione dell'asse radicale.

E' conveniente cercare le soluzioni comuni alle due equazioni, semplificando il sistema tra C_1 e C_2 con una sottrazione dei termini delle due equazioni, per cui si ottiene:

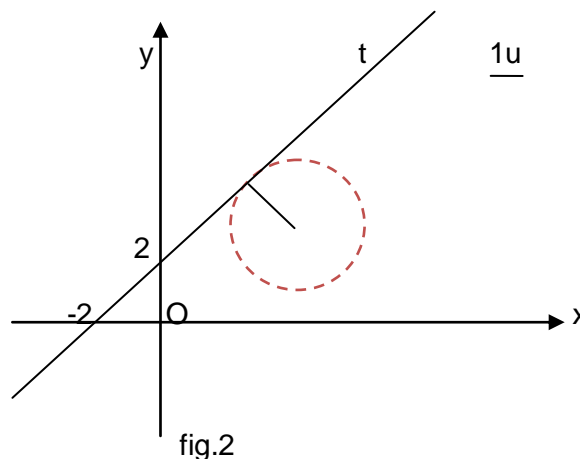
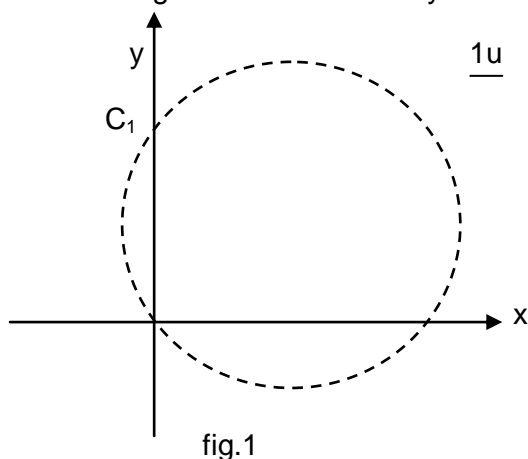
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \\ 4(2x - y + 1) = 0 \end{cases}; \quad \text{sostituendo } y = 2x + 1 \text{ nella}$$

prima equazione, dopo semplici calcoli, $x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - 4x + 2(2x + 1) = 0$, si ricava l'equazione di secondo grado $5x^2 + 4x + 3 = 0$, che non ammette soluzioni reali poiché il discriminante $\Delta/4 = -11 < 0$.



Il lavoro svolto non risulta inutile in quanto la semplificazione del sistema ha consentito di trovare automaticamente l'equazione dell'asse radicale, la cui formula è in generale $(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$, già applicata direttamente.

ESEMPIO 2.4. Dopo aver scritto il fascio di circonferenze di centro $C(4;3)$, individuare quella di raggio $r = 5$ e l'altra tangente alla retta $t: x - y + 2 = 0$



In questo caso il fascio richiesto è formato da tutte circonferenze concentriche di raggio variabile r e centro in $C(4;3)$, per cui l'equazione di f si può comodamente scrivere con la formula della distanza tra due punti: $f (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = r^2 . (1)$

Per individuare la circonferenza di raggio $r = 5$, basta sostituire il valore r in f , da cui si ricava:

$$C_1 \quad x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 + 9 = 25; \text{ ossia } x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0. \quad \text{fig. 1}$$

Nell'altro caso è conveniente calcolare il raggio della circonferenza con la distanza dal centro C alla tangente t ; quindi

$$r = d(C;t) = |x - y + 2|_C / \sqrt{2} = |4 - 3 + 2| / \sqrt{2} = 3 / \sqrt{2}; \text{ sostituendo } r \text{ nell'equazione di } f, \text{ si ottiene:}$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = (3 / \sqrt{2})^2; \quad x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 + 9 = 9/2; \quad x^2 + y^2 - 8x - 6y + 41/2 = 0 \quad \text{fig. 2}$$

ESEMPIO 2.5. Determinare I punti base del fascio f di circonferenze di equazione

$$f: x^2 + y^2 + 2(k + 2)x - (2k - 3)y + 4(k + 1) = 0 ,$$

individuare poi: a) la retta dei centri; b) la circonferenza avente il centro in $C(-7/2;0)$

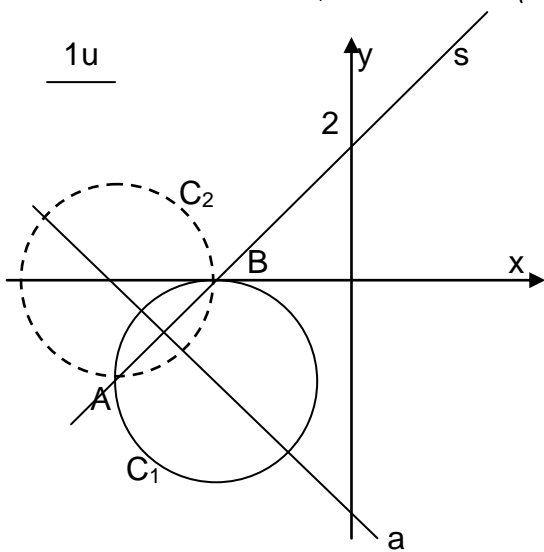
Mettendo in evidenza le generatrici del fascio f , è possibile individuare facilmente le due equazioni da intersecare in un sistema di secondo grado; infatti da

$$x^2 + y^2 + 4x + 3y + 4 + k(2x - 2y + 4) = 0 , \text{ si ottiene:}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 3y + 4 = 0 ; \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2 + (x+2)^2 + 4x + 3(x+2) + 4 = 0 ; \\ y = x + 2 \end{cases} \begin{cases} 2x^2 + 11x + 14 = 0; \\ y = x + 2 ; \end{cases}$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 112}}{4} = \frac{-11 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = -7/2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -7/2 \\ y_1 = -3/2 \end{cases} \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

I punti di intersezione sono quindi $A(-7/2; -3/2)$ e $B(-2; 0)$, che rappresentano i punti base del fascio. La circonferenza base C_1 ha centro in $H(-2; -3/2)$ e raggio $r = 3/2$, mentre l'asse radicale s è $x - y + 2 = 0$.



Per individuare la retta dei centri occorre ricordare che essa è perpendicolare all'asse radicale s ; quindi si costruisce l'equazione a imponendo il passaggio per H ; in simboli:

$$m_s = 1, m_c = -1; y + 3/2 = -1(x + 2), \text{ da cui}$$

$$a: x + y + 7/2 = 0 \text{ (retta dei centri)}$$

E' semplice infine determinare l'equazione della circonferenza di centro $C(-7/2; 0)$; basta infatti imporre C come centro di f , in modo da ricavare il valore del

parametro k , che a sua volta sostituito in f fornisce l'equazione di C_2 . In simboli:

$$x_C = -2(k + 2)/2 = -7/2 \text{ e } y_C = -(-2k + 3) = 0 \text{ da cui } k = 3/2 \text{ in entrambe le coordinate.}$$

Sostituendo il valore di k in f si ottiene:

$$C_2: x^2 + y^2 + 4x + 3y + 4 + 3/2(2x - 2y + 4) = 0; x^2 + y^2 + 7x + 10 = 0.$$